

CORSO DI LOGICA

Il giudizio e l'enunciazione o proposizione

PARTE PRIMA

IL GIUDIZIO CONSIDERATO IN SE STESSO

- **Definizione:** il *giudizio* è l'*atto tramite cui l'intelletto compone o divide qualcosa*, enunciando la *convenienza (= affermazione)* o la *ripugnanza/discrepanza (= negazione)* fra due concetti o idee (in latino: *Actio qua intellectus componit vel dividit affermando vel negando*).
- **Condizioni:** tre condizioni:
 - **nozione esatta dei termini coinvolti:** bisogna conoscere esattamente *che cosa si intende precisamente* in riferimento *ai suoi termini*, cioè al *Soggetto (= S.)* e al *Predicato (= P.)*: e.g.: se si dice «La mela è rossa», si deve sapere *esattamente* cos'è una *mela* e cosa significa *rosso*;
 - **confronto fra i due concetti**, che fungono da termini;
 - **percezione della reciproca convenienza/ripugnanza:** bisogna essere consapevoli *se quel P. si può/non si può effettivamente attribuire a quel determinato S.*

○ Elementi del giudizio:

- **MATERIA:** *due idee o concetti, comparati tra loro*;
- **FORMA:** *legame di convenienza o ripugnanza fra i due concetti/idee*, che dà luogo, rispettivamente, a un'*affermazione* (= convenienza) o a una *negazione* (= ripugnanza):
 - **e.g.1:** «l'uomo è un animale razionale» (= convenienza/affermazione);
 - **e.g.2:** «l'uomo non è un cavallo» (= ripugnanza/negazione).

○ Tipi di giudizio: *tre grandi tipologie* di giudizio:

- rispetto alla *cosa oggetto del giudizio*;
- rispetto alla *predicazione* (= attribuzione/connessione tra S. e P.);
- rispetto all'*origine/causa del giudizio*.

TIPI DI GIUDIZIO: SCHEMA DI SINTESI



○ Tipi di giudizio:

- Rispetto alla cosa:

- **vero** = esprime *conformità alla cosa*;
- **falso** = esprime *non-conformità alla cosa*;
- *verità* e *falsità* sono *qualità proprie ed esclusive del giudizio* e, come tali, non si possono attribuire né al concetto né al ragionamento → il *giudizio è la sede formale della verità o falsità*:
 - in termini rigorosi, la *verità* e la *falsità* non si possono riferire né al concetto in quanto tale, né al ragionamento: quest'ultimo, infatti, può essere *corretto/scorretto*, ma non *vero* o *falso*;
 - quando (impropriamente) si parla di “*verità*”/“*falsità*” di un ragionamento (riferendosi, in particolare, alle sue conclusioni), in realtà si fa propriamente riferimento al *contenuto veritativo delle proposizioni che lo compongono*, ossia alla *premesse* e alla/e *conclusione/i*: questi ultimi elementi, in quanto *proposizioni*, sono *espressioni di giudizi* e, dunque, *possono essere veri o falsi*.

○ Tipi di giudizio:

- Rispetto alla predicazione:

- **affermativo** = in esso il *P. conviene col S.*;
- **negativo** = in esso il *P. ripugna al S.*;

- Rispetto all'origine o causa:

- **analitico o a priori** = il *P. appartiene all'essenza del S.* secondo *tre possibili modalità*:
 - il P. è *definizione/parte della definizione* del S.: e.g.: «l'uomo è animale razionale»;
 - il P. è *è incluso nel S. come sua proprietà*: e.g.: «i corpi sono estesi»;
 - il P. è *è effetto proprio del S.*: e.g.: «il pittore dipinge»;
 - la convenienza/ripugnanza fra S. e P. è stabilita in base alla *semplice analisi intellettuale dei due concetti, senza ricorso all'esperienza.*
- **sintetico o a posteriori**: il *P. non appartiene all'essenza del S.*, ma si *aggiunge* (= *si sintetizza*) *dall'esterno, grazie all'esperienza*: e.g.: «l'uomo non è bianco»:
 - il P. è *non è definizione/parte della definizione* del S., *né una sua proprietà*;
 - la convenienza/ripugnanza fra S. e P. è un *dato di fatto fondato sull'esperienza.*

INTERMEZZO: LA CRITICA DI KANT CIRCA L'ORIGINE DEI GIUDIZI

○ Circa i giudizi analitici o *a priori*:

- sono giudizi ***puramente esplicativi***: non fanno altro che ***esplicitare un aspetto già implicitamente contenuto nel S.***;
- ciò avviene grazie al procedimento dell'***analisi***, fondata sul ***principio di non contraddizione***: essa consiste nel ***suddividere un concetto nei concetti parziali che lo compongono***;
- pur essendo giudizi *universali* e *necessari* (in quanto *a priori*), tuttavia ***non aggiungono nulla al concetto che funge da S.***: di conseguenza, ***non accrescono la nostra conoscenza***.

○ Circa i giudizi sintetici o *a posteriori*:

- sono ***fecondi sul piano conoscitivo***, in quanto fondati sull'***esperienza***: non si limitano a dividere il concetto espresso dal S. nelle sue parti costituenti, ma ***gli aggiungono qualcosa di nuovo***, derivato dall'***esperienza***;
- tuttavia, sono privi dell'***universalità*** e della ***necessità*** che caratterizzano la conoscenza scientifica, in quanto ***fondati esclusivamente sull'esperienza***.

PARTE SECONDA

IL GIUDIZIO ESPRESSO NELLA PROPOSIZIONE

L'ENUNCIAZIONE O PROPOSIZIONE

- **Definizione:** è il *discorso che esprime il giudizio*.
- **Differenziazione interna:**
 - **enunciazione:** *formulazione esplicita del giudizio all'interno della mente* (= espressione interiore del giudizio);
 - **proposizione:** *formulazione esterna del giudizio in forma orale o scritta* (= espressione del giudizio fuori della mente).
- **Termini:** sono due:
 - **Nome:** è la *semplice voce che per convenzione significa qualcosa* (= l'ente o la sostanza) *a prescindere dal tempo*, ossia in modo *statico* e *immobile*: *nomen significat sine tempore*. Grammaticalmente, può assolvere la funzione di **S.** o di *parte nominale del P.*;
 - **Verbo:** è la *semplice voce che per convenzione significa qualcosa insieme al tempo*, ossia in modo *dinamico* e *diveniente*: *verbum significat cum tempore, ut fluens*. Assume la funzione di **predicato** e può essere di due tipi:

IL VERBO: PRECISAZIONI

- **Duplica funzione:**
 - **verbo-sostantivo:** il verbo *essere* in quanto *esprime l'esistenza di qualcosa* (= non copula)
 - **verbo-attributivo:** *tutti gli altri verbi* in quanto *presuppongono il verbo essere, aggiungendogli qualche attributo*: e.g.: «Pietro corre» = «Pietro è *corrente*».
- **Il verbo *essere*:** si tratta di un verbo che svolge una funzione strategica all'interno dell'attribuzione predicativa. Anch'esso può ricoprire due funzioni:
 - **copula:** è il verbo *essere* in quanto *unisce semplicemente il P. al S. senza esprimere l'esistenza del S. stesso*: e.g.: «Pietro è alto»: dice una qualità di Pietro, senza dire se Pietro esiste:
 - è un *nesso grammaticale, non logico!*
 - esprime il *legame di convenienza fra il concetto-P. e il concetto-S.*: con la copula il *concetto-P.* passa dall'essere *un semplice concetto* all'essere il *P. di quel S.*, dando vita al *verbo attributivo*.
 - **verbo-sostantivo (o verbo-P.: vedi sopra):** e.g.: «Carlo è».

L'ENUNCIAZIONE O PROPOSIZIONE

- **Classificazione delle proposizioni:** ci sono *due principali criteri di classificazione*:
 - **MATERIA:** **S.** e **P.:** all'interno della MATERIA si distingue una *triplice classificazione*:
 - rispetto al P.
 - rispetto al S.
 - rispetto all'*unità S.-P.*
 - **FORMA:** esprime il *nesso logico (= copula) tra S. e P.:* si distingue una *duplice classificazione*:
 - assertorie o categoriche
 - modali

L'ENUNCIAZIONE O PROPOSIZIONE

○ Dalla parte della MATERIA

- Rispetto al P.:

- **necessaria** = il *P. non può essere negato del S.*: e.g.: «La somma degli angoli interni di un triangolo è 180 gradi»;
- **contingente** = il *P. appartiene di fatto al S.*, ma il *S. potrebbe anche non possederlo*: e.g.: «quest'uomo ha la barba»;
- **impossibile** = il *P. è incompatibile con il S.*: e.g.: «Il bronzo è oro».

- Rispetto al S. (= *quantità della proposizione*):

- **universale** = il *P. è attribuito a tutte le cose alle quali si estende la nozione del S.*: tale attribuzione può avvenire in forma *affermativa* (= A) o *negativa* (= E);
- **particolare** = il *P. è attribuito soltanto ad alcune cose alle quali si estende la nozione del S.*: tale attribuzione può avvenire in forma *affermativa* (= I) o *negativa* (= O);
- **singolare** = il *P. è attribuito a un individuo*: e.g.: «Giacomo è medico».
- **indefinita** = il *P. è attribuito al S. senza precisarne l'estensione*: e.g.: «La balena è un cetaceo».

L'ENUNCIAZIONE O PROPOSIZIONE

○ Dalla parte della MATERIA

- Rispetto all'*unità S.-P.*:

- **semplici** = *un solo S.* si unisce *a un solo P.* tramite la *copula* → una sola affermazione/negazione: e.g.: «La torta è deliziosa»;
- **composte** = insieme di *più enunciazioni semplici*:
 - *apertamente composte* = la *composizione* dell'enunciazione emerge *in modo esplicito*. Si suddividono in *ipotetiche*, *disgiuntive* e *copulative*
 - *occultamente composte* = solo *apparentemente sono proposizioni semplici*, ma in realtà *implicano nascostamente più affermazioni o negazioni*. Si suddividono in *esclusive*, *eccettive*, *reduplicative*, *comparative*, *causali* e *avversative*.

ENUNCIAZIONI APERTAMENTE COMPOSTE

- **Ipotetiche** = *S. e P. sono collegati affermativamente o negativamente tramite una condizione di connessione: «se ... allora»*: e.g.: «se piove allora ci sono nuvole in cielo»:
 - la **verità/falsità** di tali proposizioni dipende dalla **verità/falsità della connessione tra «SE» (= condizionante) e «ALLORA» (= condizionato)**;
 - nella logica formale contemporanea, corrispondo all'operazione dell'**implicazione: $p \rightarrow q$ ($\rightarrow$ = implica)**
- **Disgiuntive** = esprimono **una contrapposizione** e un'**alternativa tra S. e P.**: e.g.: «o studio, o dormo»:
 - la **contrapposizione** sta nel fatto che **una parte esclude l'altra**, mentre l'**alternativa** sta nel fatto che **una volta posta una parte l'altra è esclusa**;
 - la **verità/falsità** di tali proposizioni dipende **dalla reciproca esclusione dei due membri** (= o è vero l'uno, o è vero l'altro).
- **Copulative** = esprimono l'**unione simultanea di due affermazioni o di due negazioni**: e.g.: «la terra si muove e il sole sta fermo»; «né la musica né l'esecuzione sono buone»:
 - la **verità/falsità** di tali proposizioni dipende **dalla verità di entrambe le parti**.

ENUNCIAZIONI APERTAMENTE COMPOSTE: PRECISAZIONI

○ Proposizioni ipotetiche:

- si compongono, come visto, di due parti:
 - **prima parte:** è quella che *segue «SE»* ed è chiamata **condizionante/condizionale**: contiene l'**ipotesi** e in grammatica è comunemente detta **protasi o premessa** (= subordinata);
 - **seconda parte:** è quella che *segue «ALLORA»* ed è chiamata **condizionato**: contiene la **conseguenza dell'ipotesi** e in grammatica è chiamata **apodosi o conseguenza** (= principale).
- il **condizionante** è **condizione sufficiente** del **condizionato**, mentre quest'ultimo è **condizione necessaria del primo** (= condizionante);
- l'**unico caso** in cui l'**ipotetica è falsa** (= falsità dell'operazione dell'**implicazione**) è quello in cui il **condizionato è falso** e il **condizionante è vero**; di qui deriva l'**indifferenza del valore di verità del condizionante** rispetto all'**implicazione**, come mostra la **tavola di verità dell'implicazione**.

○ Proposizioni disgiuntive:

- nella logica formale contemporanea corrispondono alla **disgiunzione esclusiva**: $p \dot{\vee} q$ ($\dot{\vee} = \text{xor}$);
- perché sia vera l'**operazione della disgiunzione esclusiva**, le proposizioni **non possono avere lo stesso valore veritativo**: in questo caso, **verrebbe meno l'alternativa** tra le due proposizioni; possono avere solo **valore veritativo opposto**, come mostra la **corrispondente tavola di verità**.

ENUNCIAZIONI APERTAMENTE COMPOSTE: PRECISAZIONI

○ Proposizioni ipotetiche: TAVOLA DI VERITÀ

e.g.: «se piove allora ci sono nuvole in cielo», dove p : «piove» e q : «ci sono nuvole in cielo»:

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Indifferenza del valore veritativo del *condizionale*:

Il *condizionale* può essere sia vero, sia falso, ma la relazione di *implicazione* risulta falsa **solo se un condizionato falso segue a un condizionale vero**, mentre risulta vera in tutti gli altri casi.

○ Proposizioni disgiuntive esclusive: TAVOLA DI VERITÀ

e.g.: «o dormo, o studio» dove p : «o dormo» e q : «o studio»:

p	q	$p \dot{\vee} q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

ENUNCIAZIONI APERTAMENTE COMPOSTE: PRECISAZIONI

○ Proposizioni copulative:

- nella logica formale contemporanea corrispondono alla **congiunzione: $p \wedge q$ (= p et q)**;
- l'operazione della **congiunzione è vera solo se entrambe sono vere**, come si evince dalla **corrispondente tavola di verità**:

e.g.: «la terra si muove e il sole è fermo», dove **p** : «la terra si muove» e **q** : «il sole è fermo»:

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

ENUNCIAZIONI OCCULTAMENTE COMPOSTE

- **Esclusive** = esprimono *l'esclusione di un P. da tutti i S. tranne uno* e implicano *un'affermativa e una negativa*: e.g.: «solo Dio è buono»:
 - *affermativa*: «Dio è buono»;
 - *negativa*: «gli altri esseri non sono buoni».
- **Eccettive** = simili alle *esclusive*, esprimono *un'eccezione rispetto a quanto affermato nel P.*; in altri termini, esprimono *l'esclusione di un S./più S. da ciò che esprime il predicato*. Anche le eccettive implicano *un'affermativa e una negativa*: e.g.: «Tutti corrono, eccetto Mario»:
 - *affermativa*: «Tutti corrono»;
 - *negativa*: «Mario non corre».
- **Reduplicative** = presentano nella formulazione l'espressione *in quanto* e implicano *un'affermativa e una causale*: e.g.: «L'uomo, in quanto è dotato di pensiero, è capace di conoscere Dio»:
 - *affermativa*: «L'uomo è capace di conoscere Dio»;
 - *causale*: «poiché è dotato di pensiero».

ENUNCIAZIONI OCCULTAMENTE COMPOSTE

- **Comparative** = esprimono **un paragone** e implicano **due affermative o due negative**: e.g.: «Milano è più a nord di Bologna»:
 - **prima affermativa**: «Bologna è a nord»;
 - **seconda affermativa**: «Milano è lo è [a nord] più di Bologna».
- **Causali** = esprimono una **spiegazione causale** e implicano **un'affermativa (o una negativa) e una causale**: e.g.: «Pietro si è raffreddato perché non si è ben coperto»:
 - **affermativa**: «Pietro si è raffreddato»;
 - **causale**: «perché non si è ben coperto».
- **Avversativa** = presentano l'espressione **... ma ...** nella propria formulazione e implicano **due affermative**: e.g.: «Pietro è intelligente, ma pigro»:
 - **prima affermativa**: «Pietro è intelligente»;
 - **seconda affermativa**: «Pietro è pigro».

L'ENUNCIAZIONE O PROPOSIZIONE

○ Dalla parte della FORMA

- **Assertorie o categoriche:** esprimono *semplicemente qualcosa*:
 - **affermative** = esprimono qualcosa secondo un *rapporto di convenienza tra S. e P.*: e.g.: «tutti gli uomini sono animali»:
 - il P. dell'affermativa è preso *secondo tutta la sua comprensione, ma non secondo tutta la sua estensione* → è un *predicato particolare*: tutti gli uomini sono sicuramente animali, ma gli uomini *non sono gli unici animali* né *tutti gli animali sono uomini*.
 - **negative** = esprimono qualcosa secondo un *rapporto di ripugnanza tra S. e P.*: e.g.: «tutti gli uomini non sono angeli»:
 - il P. della negativa è preso *secondo tutta la sua estensione, ma non secondo tutta la sua comprensione* → è un *predicato universale*: tutti gli uomini non sono sicuramente angeli, ma *non si sa che cosa siano*.

L'ENUNCIAZIONE O PROPOSIZIONE

○ Dalla parte della FORMA

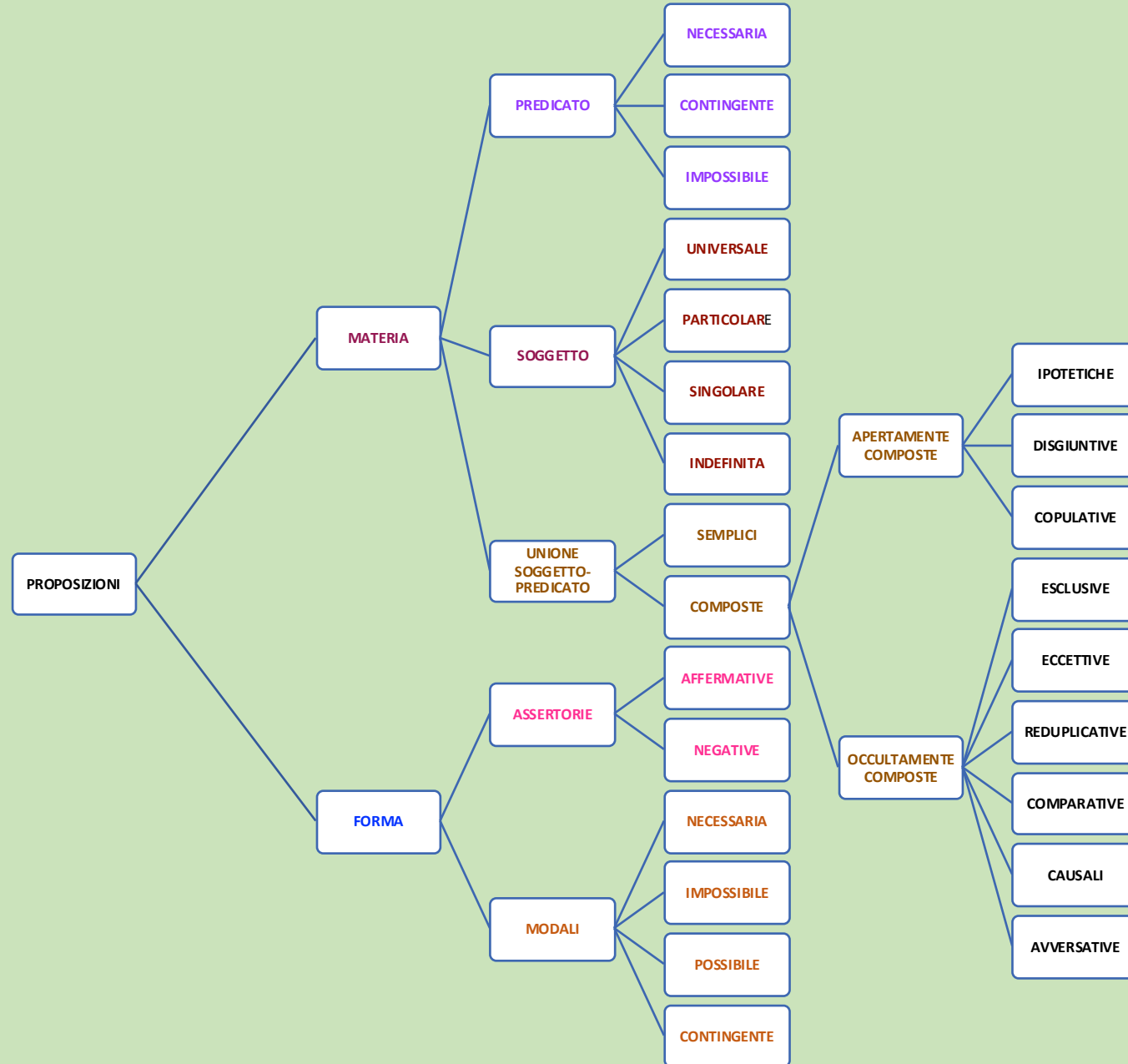
- **Modali**: esprimono qualcosa indicando *il modo in cui sono connessi tra loro il S. e il P.*: in esse **si distinguono due elementi**:
 - **dictum** = *ciò che viene detto*, espresso attraverso la *coniunzione/disgiunzione S.-P.*;
 - **modus** = *il modo in cui il contenuto viene detto*. Dal **modus dipende la verità** delle modali;
 - la distinzione delle modali avviene **sulla base del modus** → **quattro modus principali**:
 - **necessaria** = e.g.: è necessario che un triangolo abbia tre lati e tre angoli (equivale a un'universale affermativa = *tutti i triangoli hanno tre lati e tre angoli*)
 - **impossibile** = e.g.: è impossibile che un triangolo abbia quattro lati (equivale a un'universale negativa = *nessun triangolo ha quattro lati*);
 - **possibile** = e.g.: è possibile che un triangolo abbia due lati uguali (equivale a una particolare affermativa = *qualche triangolo ha due lati uguali*);
 - **contingente** = e.g.: è contingente che quell'uomo abbia la barba (equivale a una particolare negativa = *qualche uomo non ha la barba*).

L'ENUNCIAZIONE O PROPOSIZIONE

CORRISPONDENZA ASSERTIVE/MODALI

ASSERTORIE	FORMA DELL' ASSERTORIA	MODALI
A	UNIVERSALE AFFERMATIVA (e.g.: «Ogni corpo è vivente»)	NECESSARIA
E	UNIVERSALE NEGATIVA (e.g.: «Ogni corpo non è vivente»)	IMPOSSIBILE
I	PARTICOLARE AFFERMATIVA (e.g.: «Qualche corpo è vivente»)	POSSIBILE
O	PARTICOLARE NEGATIVA (e.g.: «Qualche corpo non è vivente»)	CONTINGENTE

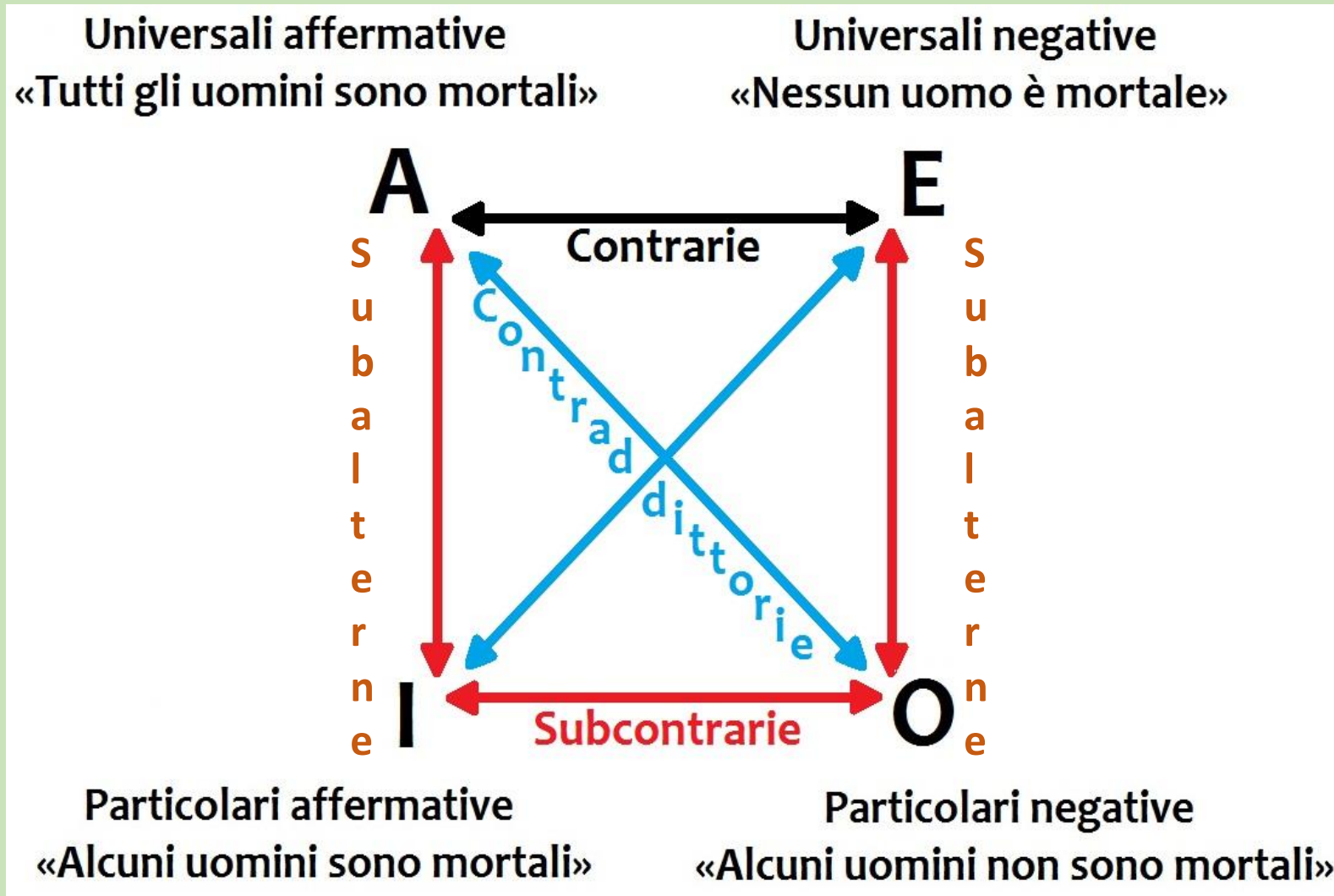
CLASSIFICAZIONE DELLE PROPOSIZIONI: SCHEMA DI SINTESI



L'ENUNCIAZIONE O PROPOSIZIONE

- **Rapporti fra le proposizioni:** due rapporti fondamentali:
 - **Opposizione:**
 - indica *l'affermazione o la negazione dello stesso P. rispetto al medesimo S.*;
 - **tre modi** di **opposizione** = le proposizioni opposte si suddividono in **tre gruppi**:
 - *contraddittorie*
 - *contrarie*
 - *sub-contrarie*
 - i modi di opposizione sono sinteticamente e efficacemente rappresentati nel cosiddetto **quadrato logico** noto come **quadrato di Apuleio**.
 - **Equipollenza:** è la proprietà per cui una proposizione *può essere logicamente equivalente alla sua opposta, con l'aggiunta di un'opportuna negazione*.

L'OPPOSIZIONE: IL QUADRATO LOGICO



L'OPPOSIZIONE: IL QUADRATO LOGICO

○ Tipi di opposizione:

- **contraddittoria** = due proposizioni sono **contraddittorie** quando **una consiste nella negazione dell'altra**:
 - differiscono sia **per la forma**, sia per **il S.**: se una è **affermativa**, l'altra è **negativa**; se una è **universale**, l'altra è **particolare**: infatti, la **contraddizione** si realizza **tra A ed O, tra E ed I** oppure **tra due singolari, di un una affermativa e l'altra negativa**;
 - rappresenta la **massima opposizione: non possono mai avere lo stesso valore veritativo** (= né entrambe vere, né entrambe falsa: una vera, l'altra falsa).
- **contraria** = due proposizioni sono **contrarie** quando **una nega qualcosa in più di ciò che l'altra afferma**: dicendo: «nessun uomo è mortale» non nego solo che tutti gli uomini sono mortali, ma anche che *alcuni lo sono*:
 - è un'opposizione **minore rispetto alla contraddizione**, in quanto le contrarie differiscono **solo per la forma**, ma **non per il S.**: devono essere **entrambe universali**, ma **una affermativa, l'altra negativa**: infatti, la **contrarietà** si ha **tra A ed E**;
 - possono essere **entrambe false**, ma **non entrambe vere**: in materia contingente, **potrebbe essere vera una sub-contraria**.

L'OPPOSIZIONE: IL QUADRATO LOGICO

○ Tipi di opposizione:

- **sub-contraria** = due proposizioni sono **contrarie** quando **una non nega esattamente ciò che l'altra afferma, ma nega soltanto che l'altra possa avere valore universale**: opponendo tra loro le proposizioni: «Alcuni uomini sono mortali» e «Alcuni uomini non sono mortali», non si nega la prima, ma soltanto **il suo valore universale**, cioè che l'affermazione fatta a proposito di *alcuni* possa estendersi a tutti.
 - opposizione **ancora minore rispetto alle prime due**: pur differendo **solo per la forma**, ma **non per il S.**, le **sub-contrarie** devono essere **entrambe particolari**, ma **una affermativa, l'altra negativa**: infatti, la **sub-contrarietà** si ha **tra I e O**;
 - possono essere **entrambe vere**, ma **non entrambe false**: in quest'ultimo caso, le **loro contraddittorie** (rispettivamente, E e A) **sarebbero entrambe vere**; ma **le contraddittorie delle sub-contrarie** sono **tra loro contrarie** e **due contrarie**, come visto, **non possono essere entrambe vere**.
- **sub-alterne**: non rappresentano un'opposizione, ma soltanto un **rapporto di subordinazione**: infatti, differiscono **per S.**, ma **non per forma**: sono **entrambe o affermative o negative**, ma **una universale, l'altra particolare** (= A/I; E/O).

L'OPPOSIZIONE: PRECISAZIONI

- Nel caso delle *proposizioni modali*:
 - **l'opposizione dipende dal *modus*** e non dal *dictum*;
 - il quadrato logico si può applicare **sulla base della corrispondenza fra assertorie e modali**:
 - **contraddittorie** = necessaria/contingente – impossibile/possibile;
 - **contrarie** = necessaria/impossibile;
 - **sub-contrarie** = possibile/contingente;
 - **subalterne** = necessaria/possibile – impossibile/contingente

L'EQUIPOLLENZA

○ Regole:

- **contrarie**: si aggiunge un **non dopo il S.:**
e.g.: A: «Ogni uomo è filosofo» diventa E: «Ogni uomo **non** è filosofo».
- **contraddittorie**: si aggiunge un **non prima del S.:**
e.g.: A: «Ogni uomo è filosofo» diventa O: «**Non** ogni uomo è filosofo».

L'ENUNCIAZIONE O PROPOSIZIONE

- **Conversione delle proposizioni:** consiste nell'*inversione fra S. e P.*, salvaguardando sia la *forma della proposizione*, sia il suo *valore veritativo*: e.g.: «nessun triangolo è cerchio» → «nessun cerchio è triangolo». Esistono *tre tipi di conversione*:
 - *totale* (= *simplex*) = consiste nel *mantenere lo stesso S.* (= la stessa *quantità*);
 - in questo modo si convertono **E ed I** perché *l'estensione di P. è identica a quella di S.*: e.g.: E: «**Nessun** uomo è filosofo» → «**Nessun** filosofo è uomo»; I: «**Qualche** uomo è filosofo» → «**Qualche** filosofo è uomo».
 - *parziale* (= *per accidens*) = consiste nel *modificare il S.* (= la *quantità*);
 - in questo modo si converte **A**, quando *l'estensione di P. supera quella di S.*: e.g.: «**Tutti gli uomini** sono mortali» → «**Qualche mortale** è uomo».
 - *indiretta* (= *per contrapositionem*) = consiste nell'*estendere le nozioni del S. e del P. mettendo anteponendo a entrambi un «non»*:
 - in questo modo si convertono **A e O**: e.g.: A: «Tutti gli uomini sono filosofi» → «Tutti i **non filosofi** sono **non uomini**»; e.g.: O: «Qualche uomo non è filosofo» → «Qualche **non filosofo** è **non uomo**».

APPENDICE/1

**CENNI DI LOGICA FORMALE PROPOSIZIONALE:
TAVOLE DI VERITÀ
DELLE OPERAZIONI LOGICHE FONDAMENTALI**

LOGICA FORMALE E PROPOSIZIONI

- Nella **logica matematica** o **logica formale contemporanea** la trattazione logica classica sull'enunciazione/proposizione ha subito **alcune modificazioni**, di cui si intende brevemente rendere conto in questa appendice.
- Tali modificazioni sono essenzialmente riconducibili a tre principali:
 - una **maggiore formalizzazione e rigorizzazione** del discorso proposizionale, mediante l'uso di **simboli matematici** indicanti sia le proposizioni, che le operazioni su di esse;
 - l'utilizzo delle **tavole di verità**, in cui sono rappresentati (in termini matematici) i **valori di verità** delle operazioni con le proposizioni;
 - la **scomparsa della sottile differenza** esistente, nella logica classica, tra **enunciazione e proposizione**: i termini sono, di fatto, considerati **sinonimi** e, quindi, **interscambiabili**.
- Le differenze ora evidenziate hanno permesso di **ampliare la della trattazione logica aristotelica sulle proposizioni**, dando vita alla cosiddetta **logica proposizionale**:
 - si tratta di un **linguaggio formale che traduce le proposizioni in una struttura sintattica semplice**, basata su **enunciati elementari (= proposizioni atomiche)** e su **connettivi vero-funzionali (= le operazioni logiche fondamentali e il rispettivo valore veritativo)**;
 - trova espressione concerta nelle **tavole di verità** di ciascuna operazione logica di fondamentale.

LOGICA FORMALE E PROPOSIZIONI

○ Osservazioni:

- Dal confronto fra logica classica e logica formale proposizionale restano inalterati:
 - la **definizione di proposizione**, intesa come **ogni espressione linguistica della quale si possa stabilire con certezza il valore veritativo** (cioè, se è V o F);
 - **alcune proprietà e/o operazioni** con le proposizioni, già presenti nella logica classica;
 - le **proposizioni o enunciati** sono detti **atomici** (o anche, più semplicemente, **atomi**), in quanto si presentano in una forma estremamente elementare:
 - e.g.: p1: «La Luna è un satellite»; p2: «9 è multiplo di 4».
- Grazie all'uso dei *connettivi logici* e *vero-funzionali*, si passa da enunciati elementari a **enunciati più complessi**, dei quali parimenti si studia il valore veritativo attraverso le *operazioni logiche fondamentali*, cui i connettivi fanno riferimento.

LOGICA FORMALE E PROPOSIZIONI

- **Definizione di *enunciato* o *proposizione*** = ogni espressione linguistica o frase per la quale si possa ***stabilire con certezza il suo valore di verità*** (se è vera o falsa):

e.g.: sono enunciazioni o proposizioni le seguenti frasi:

p: «La Luna è un satellite» (= vera); q: «9 è multiplo di 4» (= falsa)

non sono enunciazioni o proposizioni, invece:

p: «Quest'anno sarò promosso»; q: «il divorzio è un bene sociale»

- **Principali operazioni:** dette ***p*** e ***q*** le proposizioni coinvolte, si avranno le seguenti **operazioni principali:**

- ***coniunzione;***
- ***disgiunzione;***
- ***negazione;***
- ***implicazione condizionale;***
- ***coimplicazione materiale o bicondizionale.***

LOGICA FORMALE E PROPOSIZIONI

- **Congiunzione** = si definisce *congiunzione* di due proposizioni p e q e si indica con la scrittura: $p \wedge q$ (si legge: « p et q ») la proposizione che è vera se entrambe le proposizioni sono *contemporaneamente vere*, mentre risulta *falsa in ogni altro caso* (logica classica = *copulativa*):
 - **e.g.1:** p : «12 è divisibile per 2» (V); q : «12 è divisibile per 3» (V);
 $p \wedge q$: «12 è divisibile per 2 e per 3» (V).
 - **e.g. 2:** p : «12 è multiplo di 6» (V); q : «12 è multiplo di 7» (F);
 $p \wedge q$: «12 è multiplo di 6 e di 7 (F).

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

LOGICA FORMALE E PROPOSIZIONI

○ **Disgiunzione** = presenta due casi:

- **disgiunzione inclusiva** = si definisce **disgiunzione inclusiva** di due proposizioni p e q e si indica con la scrittura: $p \vee q$ (si legge: « p vel q ») la proposizione che è vera se almeno una delle due è vera, mentre risulta **falsa se entrambe sono false**:

▪ **e.g.1:** p : «21 è divisibile per 7» (V); q : «21 è pari» (F);

$p \vee q$: «21 è divisibile per 7 oppure è pari» (V).

▪ **e.g. 2:** p : «12 è maggiore di 20» (F); q : «12 è divisibile per 7» (F);

$p \vee q$: «12 è maggiore di 20 oppure è divisibile per 7 (F).

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

LOGICA FORMALE E PROPOSIZIONI

- **Disgiunzione** = presenta due casi:

- *disgiunzione esclusiva* = si definisce *disgiunzione esclusiva* di due proposizioni p e q e si indica con la scrittura: $p \dot{\vee} q$ (si legge: « p xor q ») la proposizione che è vera se entrambe le proposizioni non hanno contemporaneamente lo stesso valore di verità (= o è vera l'una, o è vera l'altra), mentre risulta *falsa in caso contrario* (logica classica = *disgiuntiva*):

- **e.g.1:** p : «15 è divisibile per 3» (V); q : «15 è pari» (F);
 $p \dot{\vee} q$: «o 15 è divisibile per 3, o 15 è pari» (V).
- **e.g. 2:** p : «15 è maggiore di 5» (V); q : «15 è divisibile per 3» (V);
 $p \dot{\vee} q$: «o 15 è maggiore di 5, o è divisibile per 3 (F).

p	q	$p \dot{\vee} q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

LOGICA FORMALE E PROPOSIZIONI

- **Negazione** = si dice *negazione* di un enunciato p e si indica con: $\neg p$ (si legge: «non p » oppure « p *negato*») quell'enunciato che è vero se p è falso ed è *falso* se p è vero:

p	$\neg p$
V	F
F	V

LOGICA FORMALE E PROPOSIZIONI

- **Implicazione materiale o condizionale** = si definisce *implicazione materiale o condizionale* di due proposizioni p e q e si indica con la scrittura: $p \rightarrow q$ (si legge: «se p , allora q » oppure « p implica q ») la proposizione che è *falsa solo nel caso in cui p è vera e q è falsa*, mentre risulta *vera in tutti gli altri casi* (logica classica = *ipotetica*):
 - la proposizione p è detta *antecedente*, mentre la proposizione q è detta *conseguente*;
 - fra p e q intercorre un *nesso di causalità*, cioè un *rapporto di causa-effetto* che viene affermato attraverso la proposizione $p \rightarrow q$: questo rapporto è *valido se, ogni volta che si verifica la causa p , allora si determina anche l'effetto q* (e.g.: se il Sole tramonta, allora fa buio); quindi, se p è vera, sarà vera anche q , mentre *se p non è vera*, allora *non si potrà dire nulla su q* : q potrebbe non verificarsi oppure verificarsi in dipendenza di una causa diversa da p (e.g.: se c'è un'eclissi totale di Sole, fa buio anche se il sole non è tramontato): per questa ragione, nelle ultime righe della tavola di verità, in dipendenza da p falso e indipendentemente dal valore veritativo di q , l'operazione finale è sempre considerata vera
 - il **calcolo** del *valore veritativo* dell'*enunciato complessivo* non dipende dal significato delle singole proposizioni, ma soltanto *da ciò che stabilisce la tavola di verità*, anche *se gli enunciati non sono legati da un rapporto di causa-effetto o non sono dello stesso tipo* (= disomogenei): in questi due ultimi casi, si parla di *paradossi dell'implicazione materiale* (v. slide seguente).

LOGICA FORMALE E PROPOSIZIONI

○ Implicazione materiale: un **esempio di paradosso**:

- p : «Caserta è la capitale della Francia» (F);
- q : «12 è un numero primo» (F)
- $p \rightarrow q$: «se Caserta è la capitale della Francia, allora 12 è un numero primo» (V)
 - p e q sono chiaramente disomogenee;
 - l'implicazione è vera perché così stabilisce la tavola di verità, in presenza di proposizioni che hanno lo stesso valore veritativo (in questo caso, entrambe F);
 - si può addurre una giustificazione per paradosso del **valore veritativo** (= V) dell'enunciato complessivo: $p \rightarrow q$ *risulta vera* ragionando così: se, **paradossalmente**, Caserta fosse la capitale della Francia, allora **altrettanto paradossalmente** si può ammettere che 12 è numero primo.

LOGICA FORMALE E PROPOSIZIONI

○ Implicazione materiale:

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

- Operazioni complementari (rispetto alle seguenti operazioni, $p \rightarrow q$ è detta *implicazione diretta*):

- *implicazione contraria*: $\neg p \rightarrow \neg q$;
- *implicazione inversa*: $q \rightarrow p$;
- *implicazione contronominale*: $\neg q \rightarrow \neg p$.

e.g.: $p \rightarrow q$: «Se Tom è un gatto, allora Tom è un felino» (= *diretta*):

- *contraria*: «Se Tom non è un gatto, allora Tom non è un felino»;
- *inversa*: «Se Tom è un felino, allora Tom è un gatto»;
- *contronominale*: «Se Tom non è un felino, allora Tom non è un gatto».

LOGICA FORMALE E PROPOSIZIONI

○ Implicazione materiale:

- **OSSERVAZIONE** = nelle **moderne logica e filosofia del linguaggio** l'**implicazione materiale** ha conosciuto uno **studio** e un **approfondimento particolarmente interessanti**, soprattutto in relazione a come viene interpretato il **legame logico** che esprime il **nesso di causalità**: a questo proposito, al giorno d'oggi le **proposizioni condizionali** vengono distinte in **tre tipi principali**:

- **condizionali materiali** = costituiscono il **caso preso in esame** dalla **logica proposizionale classica**: la proposizione $p \rightarrow q$ (F) solo se p (V) e q (F), mentre è **vero** in **tutti gli altri casi** (si veda la tavola di verità);
- **condizionali indicativi** = si tratta di **enunciati** presenti nel **linguaggio comune**, quando si fanno affermazioni su **eventi possibili** o sui quali **non si conosce ancora il valore di verità**:
e.g.: «Se pioverà, la strada sarà bagnata».
- **condizionali controfattuali** (detti anche semplicemente: **controfattuali**) = si tratta di **enunciati** che esprimono **situazioni ipotetiche** o **contrarie ai fatti**, spesso espressi al **congiuntivo**:
e.g.: «Se fossi andato a Roma, avrei visto il Colosseo».

N.B.: nelle moderne logica e filosofia del linguaggio di **area analitica** (= anglosassone) sono state sviluppate **interpretazioni innovative** anche sul **modo congiuntivo** e, in generale, sul **tempo verbale** proprio di questo tipo di enunciati condizionali.

LOGICA FORMALE E PROPOSIZIONI

- **Coimplicazione materiale o bicondizionale** = si definisce *coimplicazione materiale o bicondizionale di due proposizioni p e q* e si indica con la scrittura: $p \leftrightarrow q$ (si legge: « p se e solo se q » oppure « p coimplica q ») la proposizione che è *vera quando p e q hanno lo stesso valore di verità*, mentre risulta *falsa in caso contrario*:

- e.g.: p : «7 è un numero primo» (V); q : «il quadrato è un poligono» (V);

r : «il Po è una montagna» (F); s : «8 è un multiplo di 5» (F):

- $p \leftrightarrow q$: V; $r \leftrightarrow s$: V
- $p \leftrightarrow r$, $p \leftrightarrow s$, $q \leftrightarrow r$, $q \leftrightarrow s$: F

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

LOGICA FORMALE E PROPOSIZIONI

- A partire dalle **tavole di verità** e dalle relative **operazioni logiche proposizionali fondamentali** è possibile elaborare vere e proprie **operazioni di calcolo logico**, introducendo **ulteriori elementi** che accrescono la **formalizzazione di un sistema logico**, ossia la sua espressione in termini matematici.
- **Principali elementi** di **calcolo logico** e di **ulteriore formalizzazione** di un sistema logico:
 - **Formule proposizionali o enunciative** (= combinazioni di **due o più enunciati atomici**, ottenendo **enunciati più complessi**);
 - **Funzioni di verità** (= sono determinate da ogni formula proposizionale e indicano il **valore veritativo** di ciascuna formula);
 - **Proprietà delle operazioni logiche proposizionali fondamentali**;
 - **Tautologie** (= formule proposizionali **sempre vere**, indipendentemente dal valore di verità degli enunciati atomici che le compongono) e **relative leggi**;
 - **Regole di deduzione** (alcune delle quali toccano la stessa logica del sillogismo);
 - **Quantificatori**: $\exists$ (= esiste: *quantificatore esistenziale*); $\forall$ (= per ogni: *quantificatore universale*).
- Gli elementi ora enucleati consentono il passaggio decisivo alla **logica dei predicati**, che ha trovato largo impiego in vasti settori matematici e, più in generale, scientifici, costituendo la base per ulteriori e più complessi sviluppi dello stesso calcolo logico e dei **sistemi logico-formali**.

TIPI DI LOGICA FORMALE

- Il *crescente livello di formalizzazione* della logica contemporanea permette di distinguere *differenti tipi* di logica formale, indicati come *ordini logici* (o *logiche formali/teorie di un determinato ordine*).
- In particolare, si distinguono **quattro tipi di fondamentali di logica formale**:
 - **Logica (o Teoria) proposizionale** = livello-base, di cui si sono forniti qui alcuni cenni fondamentali.
 - **Logiche (o Teorie) del primo ordine** = linguaggi formali (= *calcolo dei predicati*) in cui è possibile *esprimere singoli enunciati e dedurne le conseguenze in modo del tutto naturale e meccanico*. Costituiscono un *ampliamento della logica proposizionale*, grazie all'utilizzo dei *quantificatori universali* ($\forall$ = per ogni) e *esistenziali* ($\exists$ = esiste; $\nexists$ = non esiste; $\exists!$ = esiste uno solo) per rappresentare *enunciati, relazioni, ragionamenti logici e teorie matematico-scientifiche*.
 - **Logiche (o Teorie) del secondo ordine** = linguaggi formali che si distinguono da quelli del primo ordine perché i *quantificatori operano non soltanto su singoli oggetti (= individui) o su singole variabili*, ma anche su *insiemi di variabili, i quali rappresentano relazioni e funzioni dell'intero sistema*. Ciò le rende *più espressive delle logiche del primo ordine*, permettendo di formalizzare meglio le teorie e i concetti matematici.
 - **Logiche (o Teorie) di ordine superiore al secondo** = linguaggi formali che *estendono le logiche del secondo ordine*, perché i *quantificatori esprimono relazioni e funzioni su e tra gli insiemi di variabili e su e tra i singoli oggetti di un sistema*

APPENDICE/2

CENNI DI METALOGICA: I TEOREMI DI GÖDEL

PROBLEMI CON LE PROPOSIZIONI ...

- La definizione di enunciazione o proposizione come **espressione linguistica** che può essere **soltanto vera o falsa** (mai *contemporaneamente* vera e falsa, oppure né vera né falsa) è una definizione valida **in linea del tutto teorica** (si tratta della cosiddetta **oratio perfecta**).
- Nella realtà, si danno diverse eccezioni:
 - **proposizioni al futuro** = e.g.: p: «Domani pioverà» → la verità/falsità dipende dal **grado di prevedibilità** della realtà cui la proposizione fa riferimento;
 - **proposizioni ipotetiche** = e.g.: le ipotesi scientifiche → la verità/falsità dipende dalla **verifica sperimentale**;
 - **opinioni e/o proposizioni soggettivamente vere** = e.g.: p: «Il divorzio è un bene/male sociale» → la verità/falsità dipende **dalle convinzioni personali**;
 - **proposizioni che esprimono comandi, desideri, preghiere, atteggiamenti della volontà, proposizioni strumentali**: la verità/falsità dipende da **condizioni di tipo extra-teoretico** (= cioè, che vanno al di là della pura riflessione razionale);
 - **proposizioni che, all'interno di uno stesso sistema di assiomi, sono indecidibili** (= non si può stabilire il loro valore veritativo): e.g.: p: «l'aritmetica è coerente» → l'aritmetica non può provarlo *a partire da sé stessa*: non ha assiomi sufficienti per poterlo fare: **Il Teorema di Gödel**.

SISTEMI FORMALI E METALOGICA

- Le considerazioni precedentemente svolte e, in particolare, il riferimento al **secondo teorema di incompletezza di Gödel** permettono di accennare a un ulteriore ambito della trattazione: quello dei **Sistemi formali** e, di conseguenza, della **metalogica**. All'interno di questo ambito trova adeguata contestualizzazione anche il discorso sugli stessi teoremi di Gödel.
- **Definizione di Sistema formale:** un sistema formale **S**. è definito quando sono stati definiti:
 - un linguaggio **L**. così caratterizzato:
 - un insieme di *predicati*;
 - un insieme di *simboli funzionali* al calcolo dei predicati stessi;
 - un insieme di *costanti*;
 - un insieme di *variabili*;
 - *connettivi logici e quantificatori*;
 - *simboli accessori*: virgole, parentesi, etc.
 - un sistema di assiomi **Γ**., ossia un insieme di formule ben formate e strutturate;
 - un insieme di **regole di deduzione**.

SISTEMI FORMALI E METALOGICA

○ Definizione di *metalogica*:

- di fronte **a un sistema formale S.** definito nei termini precedentemente esposti, è possibile maturare una duplice opzione:
 - **occuparsi della costruzione del sistema o del calcolo logico al suo interno:** in questo caso, il sistema stesso è l'*oggetto diretto e immediato* della trattazione, il che costituisce propriamente il campo della **logica**;
 - **descrivere le proprietà generali di un sistema e confrontarlo con sistemi diversi:** in questo caso, l'oggetto della trattazione non è più il sistema come tale, ma **le teorie sul sistema stesso**. Ciò costituisce propriamente il campo della **metalogica** (= lett., **logica oltre la logica**, cioè **logica di livello superiore**).
- **Metalogica = discorso/teoria sui sistemi logici**, dei quali si indagano le proprietà generali e le relazioni con altri sistemi logici diversi. Questo passaggio segna l'*abbandono del livello logico di base* e il *passaggio a problematiche di livello superiore*:
 - il prefisso greco **meta** indicare solo il **duplice livello di significato** assunto qui dal termine *logica* (= logica *oltre* la logica, cioè *oltre il livello logico di base*), senza alcun valore metafisico;
 - i principali risultati della **metalogica** sono detti **teoremi**, da non confondersi con quelli del *calcolo assiomatico* o della *deduzione naturale*.

SISTEMI FORMALI E METALOGICA

○ Proprietà di un sistema formale S.:

- **Coerenza:** può essere definita a partire *dal suo contrario*, cioè l'**incoerenza o contraddizione o inconsistenza**:
 - **incoerenza** = si dice che un sistema formale S. è **incoerente** quando in esso è possibile **dimostrare una contraddizione**, cioè è possibile dimostrare sia l'enunciato (o la formula) **A**, sia l'enunciato (o la formula) **¬A**; dunque, qualsiasi tipo di enunciato o formula;
 - **Coerenza (o consistenza o non contraddizione) = assenza di contraddizione all'interno di un sistema S.** In particolare, un sistema formale è coerente se e solo se ha **almeno un modello**.
- **Indipendenza:** si dice che un sistema formale S. è **dotato di indipendenza** quando, nel suo sistema di assiomi **Γ**, **uno o più assiomi sono indipendente dagli assiomi rimanenti**, cioè **non sono dimostrabili a partire dagli assiomi rimanenti**.
 - ☞ Proprietà molto importante nello sviluppo della logica: l'**indipendenza** di un assioma dagli **assiomi rimanenti** di un sistema può essere giustificata *solo su base logica*, ossia trovando un **modello di assiomi** che **escluda gli assiomi indipendenti** e nel quale **gli stessi risultino falsi**.
- **Completezza:** si dice che un sistema formale S. è **completo** se **ogni enunciato o formula espressi nel suo linguaggio L. è dimostrabile o refutabile** (= si può dimostrare la sua negazione); in caso contrario, si dirà **incompleto**.

I TEOREMI DELL'INCOMPLETEZZA DI GÖDEL

- Sono **due teoremi** formulati dal logico e matematico austro-statunitense **Kurt Friedrich Gödel (1906-1978)** tra il **1930 e il 1931**, a partire alla *II Conferenza sull'epistemologia delle scienze esatte* organizzata a Königsberg nei giorni 5-7 settembre 1930;
- i due teoremi riguardano l'***incompletezza di un'ampia classe di sistemi e teorie formali***, tra cui la ***teoria formale dell'aritmetica*** e rappresentano il ***contributo fondamentale*** di Gödel alla logica del Novecento;
- i due teoremi si oppongono al programma della **scuola formalista di David Hilbert (1862-1943)**, decretandone il **definitivo fallimento**:
 - la scuola formalista cerca di ***chiarire alcuni fondamentali concetti matematici e metamatematici*** (coerenza, dimostrazione e verità) applicando ad essi ***gli stessi metodi della matematica***;
 - per attuare il suo programma, cerca una sorta di “compromesso” tra *logicismo* e *intuizionismo*:
 - assume e rielabora la ***logica formale*** così come proposta dalla **scuola logicista** di Bertrand Russell (1872-1970) e Alfred North Whitehead (1861-1947);
 - accoglie nella matematica il concetto di ***infinito*** e le ***dimostrazioni per assurdo***;
 - per sfuggire alle critiche che la **scuola intuizionista** di Jules Henry Poincaré (1854-1912) e Luitzen Egbertus Brouwer (1881-1966) muove contro i logicisti, a livello matematico cerca di limitarsi all'***applicazione di metodi finitisti e costruttivi***, tipici della scuola intuizionista.

I TEOREMI DELL'INCOMPLETEZZA DI GÖDEL

- **T1:** «Se un sistema formale S . di assiomi dell'aritmetica è coerente, cioè non contiene contraddizioni, allora S . non è sintatticamente completo».
- **Caratteristiche:**
 - ha per oggetto l'**incompletezza di qualsiasi sistema e/o teoria formali**: in un sistema/teoria formale di qualunque tipo esiste sempre una **proposizione indecidibile**, ossia né dimostrabile, né refutabile rispetto al suo valore veritativo: in altri termini, non è possibile né dimostrarne la verità (= non si può dire che sia vera), né rifiutarla in quanto falsa (quindi, affermare la verità della sua *negazione*);
 - stabilisce che in S . **esiste sempre un enunciato A tale che né A né $\neg A$ sono dimostrabili**: ciò significa che, se si vuole un sistema di assiomi **perfettamente coerente** (= senza possibilità di dedurre da esso delle contraddizioni), allora **bisogna rinunciare all'idea che in esso tutte le proposizioni vere si possano derivare dall'aritmetica**, ma esisteranno necessariamente delle proposizioni indecidibili.
- **Conseguenze:**
 - esistono **formule aritmetiche vere**, ma **indimostrabili** nell'aritmetica stessa;
 - ogni estensione di un sistema formale assiomatico S . **è sintatticamente incompleta**; a volte ciò si esprime dicendo che **l'aritmetica è essenzialmente incompleta**.

I TEOREMI DELL'INCOMPLETEZZA DI GÖDEL

- **T2:** «Se un sistema formale S. di assiomi dell'aritmetica è coerente, allora allora la sua coerenza non è dimostrabile nell'ambito del sistema S.».
- **Caratteristiche:**
 - ha per oggetto l'**impossibilità di dimostrare la coerenza dei sistemi/delle teorie formali restando all'interno dei sistemi stessi/delle teorie stesse**;
 - stabilisce che **l'aritmetica, con l'utilizzo dei suoi mezzi, non può dimostrare la propria consistenza teorica**: in altri termini, l'aritmetica **non può provare la sua coerenza rimanendo al proprio interno**, utilizzando cioè i suoi simboli, le sue regole e ogni altra sotto-teoria ammessa dall'aritmetica stessa.
- **Conseguenze:**
 - poiché l'*aritmetica* (= insieme delle proposizioni sui numeri naturali) è la base di tutta la matematica, se non è possibile dimostrarne la coerenza utilizzando metodi a essa stessa interni, allora **esiste un limite invalicabile al processo di formalizzazione e di costruzione logica** delle teorie matematiche;
 - la *coerenza* di un sistema formale S. può essere dimostrata solo *attraverso metodi più complessi* di quelli del sistema considerato → è **necessario ricorrere a un metalinguaggio che utilizzi strutture più articolate**: ogni teoria ha bisogno di una *metateoria* e **non esiste alcuna teoria ultima che possa fondare tutte le altre, inclusa se stessa**.

I TEOREMI DELL'INCOMPLETEZZA DI GÖDEL: CONSEGUENZE GENERALI

- I teoremi di Gödel hanno avuto un'enorme risonanza in matematica e in filosofia, per una serie di *conseguenze generali* che si proverà sinteticamente a elencare:
- **Conseguenze per la matematica:**
 - in primo luogo, i due teoremi mettono in evidenza una *discrepanza decisiva* fra *dimostrabilità in un sistema formale* (= il sistema è in grado di dimostrare/provare cose vere) e *verità*: nessun sistema formale può *catturare completamente* le verità aritmetiche e, se dimostra solo cose vere, *non può dimostrarle tutte*;
 - in secondo luogo, i due teoremi mostrano che *nessun sistema coerente che soddisfi le condizioni di applicabilità dei teoremi stessi è autosufficiente*, cioè capace di mostrare "con le sue sole forze" (= a partire da se stesso) di essere coerente:
 - i teoremi non vogliono sostenere che la coerenza dell'aritmetica debba intendersi quasi come un "atto di fede": sono state fornite prove di coerenza per sistemi che esprimono l'aritmetica → e.g.: Gerhard **Gentzen** (1909-1945) e il metodo della *deduzione naturale*;
 - semmai, i due teoremi evidenziano che tutte le prove esibite hanno un limite fondamentale: *utilizzano strumenti deduttivi non disponibili all'interno del sistema di cui vogliono provare la coerenza, ma provenienti dall'"esterno" del sistema stesso.*

I TEOREMI DELL'INCOMPLETEZZA DI GÖDEL: CONSEGUENZE GENERALI

- I teoremi di Gödel hanno avuto un'enorme risonanza in matematica e in filosofia, per una serie di *conseguenze generali* che si proverà sinteticamente a elencare:
- **Conseguenze per la filosofia:**
 - la **logica classica dei predicati è completa**: l'incompletezza subentra quando *si vuole costruire un sistema che incorpora l'aritmetica al suo interno*;
 - l'*incompletezza* non è dovuta ai *principi logici elementari*, ma ai *principi specifici dell'aritmetica*;
 - le nostre capacità razionali e, in generale, le risorse del pensiero umano *non si lasciano completamente racchiudere da un sistema formale*;
 - le **limitazioni dei sistemi formali** sono stabilite proprio *da una procedura logico-matematica*: per cui, il **trascendimento** della logica formale potrebbe configurarsi come una sorta di *“autotrascendimento”*, il che consentirebbe di realizzare una convergenza inaspettata con la sezione n. 6.13 del *Tractatus* di **Wittgenstein**, in cui si afferma: «La logica è trascendentale».